

**ملاحظة:** المبرهن السابقة لا يمكن استخدامه في حال كانت المعادلة التفاضلية الخطية المعطاة غير متجانسة.  
كما لا يمكن استخدامه في حال كانت المعادلة التفاضلية المعطاة غير خطية والأقطة الآتية بوضع صحت هذه الملاحظة.

**(1)** لكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية:  
 $y'' - y = 1$   
 إن كل من  $y_1 = e^x - 1$  و  $y_2 = e^{-x} - 1$  هي حل لهذه المعادلة.  
 $y_1'' = e^x \leftarrow y_1' = e^x \Leftarrow y_1 = e^x - 1$

نفوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أن:  
 $e^x - (e^x - 1) = 1 \Rightarrow e^x - e^x + 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$

أي أن  $y_1$  حل  
 $y_2'' = e^{-x} \leftarrow y_2' = -e^{-x} \Leftarrow y_2 = e^{-x} - 1$   
 نفوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أن:  
 $e^{-x} - (e^{-x} - 1) = 1 \Rightarrow e^{-x} - e^{-x} + 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$   
 أي أن  $y_2$  أيضاً حل للمعادلة.

بما  $y_3 = y_1 + y_2$   
 $y_3 = e^x - 1 + e^{-x} - 1 = e^x + e^{-x} - 2$   
 $y_3'' = e^x + e^{-x} \leftarrow y_3' = e^x - e^{-x}$   
 نفوض في المعادلة التفاضلية المعطاة فنجد أن:  
 $e^x + e^{-x} - (e^x + e^{-x} - 2) = 1 \Rightarrow 2 = 1$   
 غير ممكن

**(2)** لكن لدينا المعادلة:  
 $y'' - x \cdot y' = 0$   
 إن الدالتين:  $y_1 = 1$  و  $y_2 = x^2$  كل منها حل لهذه المعادلة:  
 $y_1'' = y_1' = 0 \leftarrow y_1 = 1$   
 $0 - 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$   
 نفوض بالمعادلة المعطاة فنجد أن:  
 إذا  $y$  هي حل للمعادلة.



$$y_2'' = 2 \leftarrow y_2' = 2x \leftarrow y_2 = x^2$$

نفرض في المعادلة المعطاة فتجد أن:  $x(2) - x(2x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$   
إذاً  $y_2$  هو حل للمعادلة:

$$y_3 = x^2 - 1 \leftarrow y_3' = y_2' + y_2' \leftarrow y_3'' = 2 \leftarrow y_3'' = 2$$

نلاحظ أن الدالة

نفرض بالمعادلة المعطاة:

$$(x^2 - 1)(2) - x(2x) = 0$$

$$2x^2 - 2 - 2x^2 = 0 \Rightarrow -2 = 0$$

غير ممكن

أي أن الدالة  $y_3 = y_2 + y_2$  ليست حلًا

**تعريف الحل العام:** ليكن لدينا المعادلة التفاضلية  $L(y) = f(x)$  بحيث أن  $L$  مؤثر تفاضلي من الرتبة  $n$  الحل العام لهذه المعادلة هو ذلك الحل الذي يحقق المعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية.

**ملاحظة:** إذا كان لدينا المعادلة  $y'' - y = 1$

إن الدالة  $y = A_1 e^x + A_2 e^{-x} - 1$  لا تحقق المعادلة التفاضلية ويحتوي على عدد من الثوابت الكيفية يساوي رتبة المعادلة التفاضلية وأنه حل ينتج عن الحل العام بإعطاء الثوابت الكيفية قيم عددية معينة ندعوه حلًا خاصًا.

**مفهوم "دوم برمان":**

لكل معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة  $n$  في الشكل  $L(y) = 0$  يوجد  $n$  حلًا مستقلًا وإذا كانت هذه الحلول هي  $y_1, y_2, \dots, y_n$  فنقترح الحل العام لهذه المعادلة يعطى بالشكل:  $y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$  **وكتبه:**  $y = \sum_{j=1}^n A_j y_j$



## ملحوظات حول المبرهنات:

- 1- الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هو الحل العام للوحيد (كما يوجد سواء) المعطاة لتحقيقه مبرهنات الوجود والوحدانية.
- 2- أي حل نحصل عليه من الحل العام بإعطاء الثوابت العددية قيم عددية معينة ندعوه حلاً خاصاً لهذه المعادلة.
- 3- مجموعة الحلول  $\{y_1, y_2\}$  ندعوها المنظومة الأساسية «قاعدة الحلول» للمعادلة التفاضلية.
- 4- قد يكون لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة أكثر من قاعدة حلول واحدة وإذا ما تم استخدام هذه القواعد عندئذ فيكون لدينا أكثر من حل عام واحد وهذا يناقضنا الملاحظة الأولى ونقول بأنه كما يوجد تناقض لأن الحل العام وحيد طالما تحققت شروط مبرهنات الوجود والوحدانية وعندئذ يمكن رد أي من القاعدتين إلى القاعدة الأصلية كما سبقنا الأمثلة الآتية:

**مثال 1:** لنفكر لدينا المعادلة التفاضلية:  $y'' - 4y = 0$

إن الدالتين  $y_1 = e^{2x}$  و  $y_2 = e^{-2x}$  هما قاعدة الحلول للمعادلة المعطاة لنثبت أن  $y_1$  و  $y_2$  هما قاعدة الحلول.

1- لنثبت أن كل دالة هي حل للمعادلة المعطاة

$$y_1 = e^{2x} \rightarrow y_1' = 2e^{2x} \rightarrow y_1'' = 4e^{2x}$$

$$4e^{2x} - 4e^{2x} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{حيث } y_1 \text{ حل}$$

$$y_2 = e^{-2x} \rightarrow y_2' = -2e^{-2x} \rightarrow y_2'' = 4e^{-2x}$$

$$4e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{حيث } y_2 \text{ حل}$$

2- نلاحظ أن عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة ويساوي 2.

3- لنثبت أن الدوال مستقلة خطياً أي  $A_1 y_1 + A_2 y_2 = 0 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = 0$

$$\textcircled{a} \quad A_1 \cdot e^{2x} + A_2 \cdot e^{-2x} = 0 \Rightarrow 2A_1 e^{2x} - 2A_2 e^{-2x} = 0 \textcircled{b}$$

نفرض المعادلة الأولى بـ 2 ونجمعها

$$4A_1 e^{2x} = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

نفرض  $A_1$  باجتماع المعادلتين نجد أنه  $A_2 = 0$

$$A_1 = A_2 = 0$$



أعني أن الدوال مستقلة وبالتالي فإن الحل العام :

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

بعيد أن  $C_1$  و  $C_2$  ثوابت كيفية

**مثال 2:** لنكن لدينا المعادلة التفاضلية :  $y''' + 9y' = 0$    
 إن الدوال  $y_1 = \cos 3x$ ,  $y_2 = \sin 3x$ ,  $y_3 = 1$    
 كل دالة من هذه الدوال هي حل.

1 عدد الدوال يساوي رتبة المعادلة.

2 علينا أن نثبت بأن هذه الدوال مستقلة خطياً أي أن نتحقق العلاقة :

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 = 0 \rightarrow A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

$$A_1 + A_2 \cos 3x + A_3 \sin 3x = 0 \quad (1)$$

$$-3A_2 \sin 3x + 3A_3 \cos 3x = 0 \quad (2)$$

$$-9A_2 \cos 3x + 9A_3 \sin 3x = 0 \quad (3)$$

يكون الجملة المعادلتين حل وحيد إذا وفقط إذا كانا معادرتين أي مثالاً كإسقاطي الصفر

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 \sin 3x & 3 \cos 3x \\ -9 \cos 3x & -9 \sin 3x \end{vmatrix} = 27 \sin^2 3x + 27 \cos^2 3x = 27 \neq 0$$

وبما أن المعادلتين متجانستين فإن الحل الوحيد هو الحل الصفرى أي أن

$$A_2 = A_3 = 0$$

$$A_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0$$

ومنه فإن

وبالتالي فإن الحل العام يكون من الشكل :

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$$

بعيد أن  $C_1, C_2, C_3$  هي ثوابت كيفية أي أن :

$$y_h = C_1 + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$$



\* كما أنه الدوال  $y_1 = 1$   $y_2 = e^{3ix}$   $y_3 = e^{-3ix}$  تشكل أيضاً قاعدة حلول للمعادلة المعطاة.

لنثبت أن  $y_2 = e^{3ix}$  هو حل للمعادلة  
 $y_2' = 3ie^{3ix} \rightarrow y_2'' = -9e^{3ix} \rightarrow y_2''' = -27ie^{3ix}$  نستنتج  
 نعوذنا بالمعادلة:

$$-27ie^{3ix} + 27ie^{3ix} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

لنفسا الطريقة ثبت إن  $y_1$  هو حل للمعادلة.

- عدد الدوال يادى رتبة المعادلة ويادى 3.

- يمكن أن نثبت أن هذه الدوال مستقلة خطياً.

ومن ثم فإن الحل العام يكتب بالصورة  
 $y = \beta_1 y_1 + \beta_2 e^{3ix} + \beta_3 e^{-3ix}$   
 نلاحظ أنه يوجد لدينا حلين عامين مختلفين من حيث الشكل والصورة مع العلم بأن شروط صيرورة الوجود والوحدانية متوفرة في المعادلة التفاضلية المعطاة.

« دوال المعاملات مستقلة » لذلك نبدأ على الملاحظة 141 يمكن رداً على الشكلين  
 للاحر كما يلي:

$$y = \beta_1 + \beta_2 (\cos 3x + i \sin 3x) + \beta_3 (\cos 3x + i \sin 3x)$$

$$y = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3) \cos 3x + (i\beta_2 + i\beta_3) \sin 3x$$

$$y = c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

وحدد فتر ونستنتج:

ليكن لدينا مجموعة الدوال  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  المعروفة والمستمرة على المجال I، فإن محدداً فتر نستنتج  
 لهذه الدوال هو بالقرينة المحدد التالي:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$



\* وإن قيمته محدث ونسبة قد تكون دالة تتعلق بالمقياس المستقل  $x$ .

$$\{x, x^2, x^3\}$$

مثال: إذا كانت لدينا الدوال

$$w(x, x^2, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} =$$

$$= x \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 3x^2 \\ 0 & 6x \end{vmatrix} + x^3 \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

\* إن قيمته محدث ونسبة قد يكون ثابتاً عددياً. مغايراً للصفر.

$$\{e^x, e^{-x}\}$$

مثال: إذا كانت لدينا الدوال

$$w(e^x, e^{-x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

\* قد يكون قيمته محدث ونسبة صفراً

مثال: إذا كانت لدينا الدوال  $\{2x, 6x\}$

$$w(2x, 6x) = \begin{vmatrix} 2x & 6x \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12x - 12x = 0$$

ملاحظة: إذا كانت الدوال  $y_1, y_2, \dots, y_n$  مرتبطة خطياً فغداً قيمته محدث ونسبة تكون معدومة أي تساوي الصفر.

البيان:

لنفرض أن  $y_1, y_2, \dots, y_n$  مرتبطة خطياً

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = 0 \text{ عند } y_i$$

$$y_n = -\frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_{n-1} y_{n-1}}{A_n}$$

نشتق هذه العلاقة  $(n-1)$  مرة متتالية فنجد أن:



SUBJECT:

$$y_n' = -\beta_1 y_1' - \beta_2 y_2' - \dots - \beta_{n-1} y_{n-1}'$$

$$y_n'' = -\beta_1 y_1'' - \beta_2 y_2'' - \dots - \beta_{n-1} y_{n-1}''$$

$$y_n^{(n-1)} = -\beta_1 y_1^{(n-1)} - \beta_2 y_2^{(n-1)} - \dots - \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}$$

ونفهم بأنه يمكن فرضه للدوال  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  أو  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$

$$w(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} \\ y_1' & y_2' & \dots & y_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{n-1}^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

نضرب جميع عناصر السور الأولى  $\beta_1$  ونضيف إلى عناصر السور الأخيرة

$$\begin{array}{ccc} \beta_1 y_1 y_n & \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + y_n & 0 \\ \beta_2 y_1' + y_n' & \beta_2 y_1' + \beta_2 y_2' + y_n' & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_n y_1^{(n-1)} + y_n^{(n-1)} & \beta_n y_1^{(n-1)} + \beta_n y_{n-1}^{(n-1)} + y_n^{(n-1)} & 0 \end{array}$$

نضرب جميع عناصر السور الثانية  $\beta_2$  ونضيفه إلى عناصر السور الأخيرة  $y_n$ . وهكذا نستمر حتى السور  $(n-1)$  نضرب جميع عناصره  $\beta_{n-1}$  ونضيفه إلى عناصر السور الأخيرة فنحصل على صفر جميع عناصر السور الأخيرة  $y_n$  صفر.

ونفهم بأنه جميع عناصر السور الأخيرة أو أحد الأسطر يساوي الصفر فإن  $w(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = 0$ .

عدد الدوال  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  المتعارفة

مبرهنة:

ليكن لدينا المتعارفة التفاضلية  $L(y) = 0$  من الرتبة  $n$  متجانسة ولكن  $L(y) \neq 0$  حلول للمعادلة التفاضلية  $L(y) = 0$ ، ان الشرط اللازم والكافي لكي تكون هذه الحلول



مستقلة هو أن يكون قيعود متعدد مترونتسي كاساوي الصفر.

الإثبات: لنفرض أن الكول مستقلة ولتثبت أن  $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$  بما أن  $\{y_i\}_{i=1}^n$  هذا يعني أن:

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$$

لشتقا هذه المعادلة (n-1) مرة متتالية فنجد أن:

$$A_1 y_1' + A_2 y_2' + \dots + A_n y_n' = 0$$

$$A_1 y_1'' + A_2 y_2'' + \dots + A_n y_n'' = 0$$

$$A_1 y_1^{(n-1)} + A_2 y_2^{(n-1)} + \dots + A_n y_n^{(n-1)} = 0$$

وإن اؤء تشكل جملة n معادلات خطية إذا اعتبرنا أن المتعاصيل هي  $A_1, A_2, \dots, A_n$  يكون لجملة هاتين المعادلتين حلا وحيد صوالي الصفرى إذا فقط إذا كان متعدد الأمثال لا يساوي الصفر

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

لكن المحدد الموجود في الطرف الأيمن في العلاقة الأخيرة هو متعدد مترونتسي أنه أن

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

(=) العكس: لنفرض أن قيعود متعدد مترونتسي لهذه الكول كاساوي الصفر ولتثبت أن مستقلة بما

$$\text{أن } W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \text{ (فرضا)} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$



أي أن الجملة المعادلتين (1) حل وحيد هو الحل الصفرى.  
تتحقق العلاقة (1) من أجل ثوابت جميعها أصفار يعني بأن الدوال مستقلة خطياً.  
مرتبط ← محدودة

حلول صم ← الحلول مستقلة، إذا كان المحدد  $\neq 0$

مرتبط " " " "  $= 0$

**مثال** لكن لدينا مجموعة الدوال

$$y_1 = x^3 \quad y_2 = |x^3|$$

$$y_1 = x^3$$

$$y_2 = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$

1-  $A_1 y_1 + A_2 y_2 = 0 \Rightarrow A_1 = A_2 = 0$

2-  $A_1 x^3 + A_2 x^3 = 0 \quad x \geq 0$

3-  $A_1 x^3 + A_2 x^3 = 0 \quad x < 0$

ونلاحظ بأن المعادلتين الأخيرتين لا تتحققان بأن واحد إلا إذا كان  $A_1 = A_2 = 0$  أي أن الدوال مستقلة لتعسبا قيمة محدودة مبرهنه:

$$w(y_1, y_2)_{x \geq 0} = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$w(y_1, y_2)_{x < 0} = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0$$